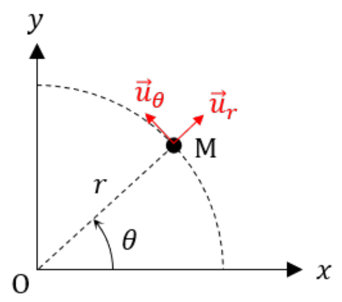
TPC1 2025/2026 – Correction du DS Physique n°2b (2h)

I) Mouvement circulaire

Soit un point M en mouvement circulaire de rayon R.

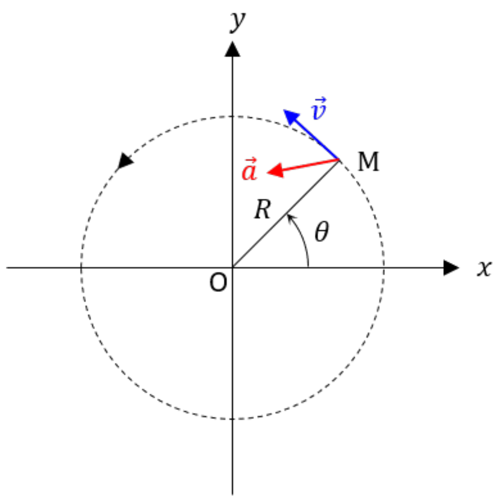
1) Faire un schéma du mouvement. Dessiner les vecteurs de la base polaire associée au mouvement.

Correction



2) Ajouter au schéma précédent le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{a}$, dans l'hypothèse où la norme de $\overrightarrow{v}$ augmente avec le temps.

Correction



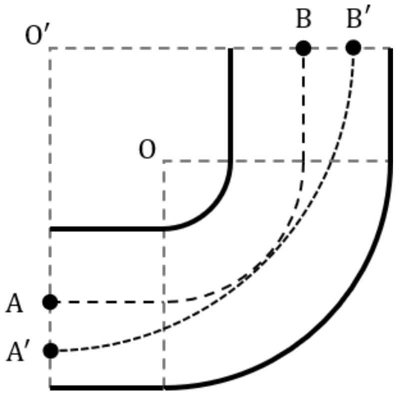
3) Établir les expressions de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ pour un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω.

Correction

On a R et ω constant. Ainsi,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OM}} = R\overrightarrow{u}_r \\ \overrightarrow{v} = R\omega\overrightarrow{u}_\theta \\ \overrightarrow{a} = -R\omega^2\overrightarrow{u}_r \end{cases}$$

On envisage deux trajectoires d'une voiture prenant un virage à vitesse constante.



La première consiste à aborder le virage en A, à parcourir une portion rectiligne de longueur $\ell = 10$ m, puis un quart de cercle de centre O, de rayon $R = 75$ m, et enfin terminer sur une portion rectiligne pour arriver en B.

La deuxième consiste à aborder le virage en A′ et suivre une trajectoire circulaire de centre O′, de rayon $R' = 90$ m, jusqu'au point B′.

4) Déterminer les longueurs de chacune des trajectoires.

Correction

Deuxième trajectoire :

$$\boxed{L_2 = \frac{2\pi R'}{4} = 141 \text{ m}}$$

Première trajectoire :

$$\boxed{L_1 = \ell + \frac{2\pi R}{4} + \ell = 138 \text{ m}}$$

5) Pour des raisons de sécurité, l'accélération subie dans le virage ne doit pas dépasser $a_m = 15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Déterminer littéralement puis numériquement les vitesses maximales auxquelles le pilote pourra rouler sur chaque trajectoire.

Correction

Dans le virage,

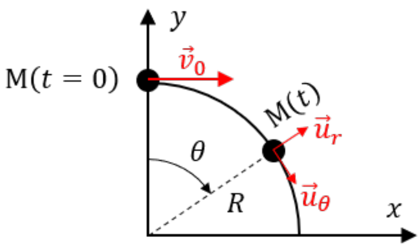
$$a = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_m = \sqrt{Ra_m}}$$

AN :

$$\boxed{v_{m1} = \sqrt{Ra_m} = 33{,}5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_{m2} = \sqrt{R'a_m} = 36{,}7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

II) Glissade sur un igloo

On étudie le mouvement d'un enfant esquimau, assimilé à un point matériel M de masse m qui glisse sans frottement sur un Igloo de rayon R. Il part avec une vitesse v_0 depuis le sommet de l'igloo.



6) Appliquer le PFD sur l'enfant dans la base polaire. Identifier l'équation du mouvement. Quelle information l'autre équation contient-elle ?

Correction

On applique le PFD sur l'esquimau dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{N} = N\ \overrightarrow{u_r}\\
&\overrightarrow{P} = mg\Big(-\cos(\theta)\ \ \overrightarrow{u_r} + \sin(\theta)\ \ \overrightarrow{u_\theta}\Big)\\
&\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\ \overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\ \overrightarrow{u_\theta}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} /\overrightarrow{u_r}\ \rightarrow\ -mR\dot{\theta}^2 = N - mg\ \cos(\theta) \\ /\overrightarrow{u_\theta}\ \rightarrow\ mR\ddot{\theta} = mg\ \sin(\theta) \end{cases}$$

La seconde équation est l'équation du mouvement. La première permet de trouver N, connaissant θ.

Il n'est pas possible de résoudre l'équation du mouvement. En revanche, on peut tout de même s'en servir pour résoudre l'autre équation, portant sur la réaction normale de l'igloo.

7) Multiplier l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, puis intégrer entre l'instant initial et un instant t quelconque. Montrer que :

$$R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R} + 2g\,(1 - \cos(\theta))$$

Correction

On multiplie la deuxième équation par $\dot{\theta}$ et on intègre par rapport au temps. On obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^t mR\dot{\theta}\ddot{\theta}\ dt = \int_0^t mg\ \dot{\theta}\sin(\theta)\ \ dt\\
\Rightarrow\ &\left[\frac{1}{2}\ mR\dot{\theta}^2\right]_0^t = \Big[-mg\ \cos(\theta)\Big]_0^t\\
\Rightarrow\ &\frac{1}{2}\ mR\left(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2\right) = -mg\,(\cos(\theta) - 1)
\end{aligned}$$

Or, on a : $v_0 = R\dot{\theta}_0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ mR\left(\dot{\theta}^2 - \left(\frac{v_0}{R}\right)^2\right) = -mg\,(\cos(\theta) - 1)\\
\Rightarrow\ &\boxed{R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R} + 2g\,(1 - \cos(\theta))}
\end{aligned}$$

8) En déduire l'expression de la norme de la force de réaction normale de l'igloo.

Correction

On en déduit l'expression de la force de réaction de l'igloo.

$$\begin{aligned}
&-mR\dot{\theta}^2 = N - mg\ \cos(\theta)\\
\Rightarrow\ &N = mg\ \cos(\theta) - m\left(\frac{v_0^2}{R} + 2g\,(1 - \cos(\theta))\right)\\
\Rightarrow\ &\boxed{N = m\left(-\frac{v_0^2}{R} + g\,(3\ \cos(\theta) - 2)\right)}
\end{aligned}$$

9) Déterminer l'angle θ_c où l'enfant décolle de l'igloo. Conclure.

Correction

Lorsque l'enfant quitte l'igloo, la force de réaction normale est nulle. Ainsi,

$$N = 0 = m\left(-\frac{v_0^2}{R} + g\,(3\ \cos(\theta_c) - 2)\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\theta_c) = \frac{1}{3}\left(\frac{v_0^2}{gR} + 2\right)}$$

L'enfant décollera toujours. Si $v_0 \to 0$, il décolle en $\theta_c = \arccos(2/3) = 48{,}2°$. Si $v_0 \geqslant \sqrt{gR}$ alors il décolle immédiatement, $\theta_c = 0$.

III) Trajectoires des plombs d'une cartouche

Cette partie se propose d'étudier les trajectoires décrites par la gerbe de plomb d'une cartouche de chasse. Un fusil de chasse (arme à feu) ou de ball-trap permet d'envoyer à distance des projectiles au moyen de gaz produits par la combustion rapide et confinée d'un composé chimique. La déflagration va éjecter de la bouche du fusil les sphères de plomb qui étaient dans la cartouche avec une vitesse qui, en moyenne, vaut $v_0 = 380\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Nous considérons la trajectoire d'un plomb de cartouche, supposée ponctuelle, et de masse $m = 0{,}1$ g. On néglige la poussée d'Archimède. On note $\overrightarrow{g}$ l'accélération de pesanteur de norme g. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

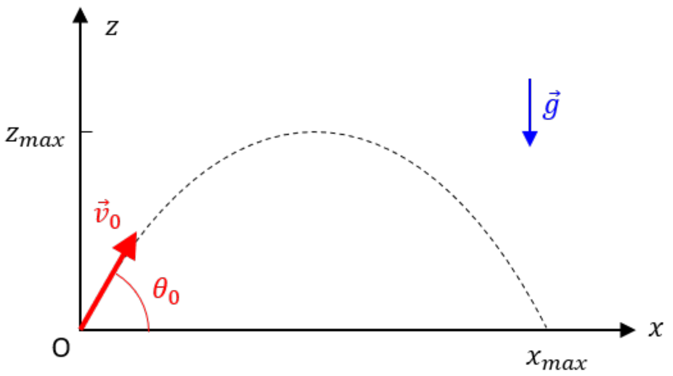


Figure n°1 : trajectoire gravitaire

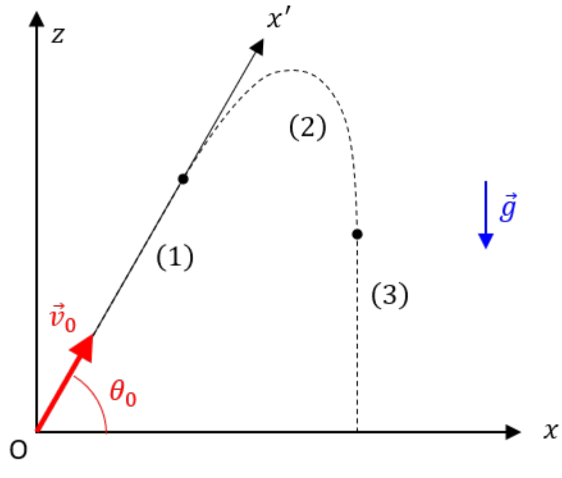


Figure n°2 : trajectoire de Tartaglia

III.1) Équation du mouvement

Le projectile est a priori soumis à deux forces : son poids et la force de frottement fluide exercée par l'air qui, dans les cas considérés, est constituée de la traînée aérodynamique qui s'écrit :

$$\overrightarrow{f} = -kv\overrightarrow{v}$$

où v est la norme du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ du projectile.

10) Déterminer la dimension dans le système international du coefficient k.

Correction

Par analyse dimensionnelle :

$$[k] = \frac{\text{Force}}{\text{Vitesse}^2} = \frac{\text{Masse} \times \text{Longueur} \times \text{Temps}^{-2}}{\text{Longueur}^2 \times \text{Temps}^{-2}} = \boxed{\frac{\text{Masse}}{\text{Longueur}}}$$

11) Établir l'équation différentielle vérifiée par $\overrightarrow{v}$.

Correction

On applique le principe fondamental de la dynamique (PDF) appliqué au plomb, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\boxed{m\,\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = m\overrightarrow{g} - kv\overrightarrow{v}}$$

12) Déterminer l'expression de la norme de la vitesse en régime permanent, notée v_∞, en fonction de m, g et k.

Correction

On cherche la solution particulière de cette équation différentielle. Le second membre étant contant, la SP est également constante. On la note $\overrightarrow{v}_\infty$ de norme v_∞. On injecte cette solution dans l'ED :

$$\overrightarrow{0} = m\overrightarrow{g} - kv_\infty \overrightarrow{v}_\infty \quad \Rightarrow \quad 0 = mg - kv_\infty^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}}}$$

III.2) Premier modèle : trajectoire gravitaire

On considère le cas où la vitesse initiale du projectile est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement fluide de l'air devant le poids de la cartouche. Se référer à la figure n°1 pour les notations.

13) Montrer que cela correspondrait à une vitesse initiale v_0, obéissant à l'inégalité : $v_0 \ll v_\infty$.

Correction

La force de frottement initiale est négligeable devant la force de pesanteur si :

$$\left\|\overrightarrow{f}\right\|(t=0) \ll mg \quad \Rightarrow \quad kv_0^2 \ll mg \quad \Rightarrow \quad v_0 \ll \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 \ll v_\infty}$$

À l'instant initial, le projectile est placé au centre du repère (point O) et possède une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0$ faisant un angle θ_0 avec l'axe horizontal.

14) Projeter l'équation du mouvement sur la base cartésienne.

Correction

La force de frottement est négligeable devant la fore de pesanteur donc le PFD devient :

$$m\,\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = m\overrightarrow{g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}}$$

15) Établir les équations paramétriques de la vitesse et de la position en fonction du temps.

Correction

On intègre deux fois le système précédent.

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = v_0\,\cos(\theta_0) \\ \dot{z} = -gt + v_0\,\sin(\theta_0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t\,\cos(\theta_0) \\ z(t) = -\dfrac{gt^2}{2} + v_0 t\,\sin(\theta_0) \end{cases}}$$

16) Quelle est la nature de cette trajectoire dite « gravitaire » ?

Correction

Obtenons l'équation $z(x)$.

$$t = \frac{x}{v_0\,\cos(\theta_0)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = -\frac{gv_0^2}{2\,\cos^2(\theta_0)}\,x^2 + x\,\tan(\theta_0)}$$

Il s'agit de l'équation d'une parabole.

17) Déterminer, en fonction de v_0, g et θ_0, la portée du tir x_{max} (abscisse atteinte par le projectile lorsqu'il touche le sol) ainsi que la hauteur maximale atteinte par le projectile z_{max} au cours du mouvement.

Correction

La portée du tir est la valeur de $x \neq 0$ telle que $z = 0$:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{gv_0^2}{2\,\cos^2(\theta_0)}\,x_{max} + \tan(\theta_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{max} = \frac{2v_0^2}{g}\,\cos(\theta_0)\sin(\theta_0) = \frac{v_0^2}{g}\,\sin(2\theta_0)}$$

La hauteur maximale du tir correspond à l'altitude z telle que $\dot{z} = 0$, soit pour :

$$t = \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2(\theta_0)}$$

III.3) Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia

Pour les plombs de chasse, $v_0 \gg v_\infty$. Dans ce cas, la trajectoire diffère considérablement de la trajectoire gravitaire. On distingue 3 phases (cf. figure n°2) : une première phase (1) à mouvement rectiligne, une deuxième phase (2) à trajectoire asymétrique autour d'un sommet et une troisième phase (3) de mouvement de chute verticale. Il s'agit d'une « trajectoire de Tartaglia », du nom du mathématicien balisticien Niccolò Tartaglia (XVI^{e} siècle), qui a décrit les trajectoires d'un boulet de canon.

Phase initiale : mouvement rectiligne ascendant

Soit (Ox') la direction de la droite trajectoire dans cette phase initiale. On note x' l'abscisse du point M sur cette droite qui fait un angle θ_0 avec (Ox) et $\overrightarrow{v}$ sa vitesse.

18) Montrer que le poids d'un plomb est alors négligeable devant la force de traînée.

Correction

Il s'agit du raisonnement inverse de la question 13. On a :

$$v_0 \gg v_\infty \quad \Rightarrow \quad v_0 \gg \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad \Rightarrow \quad k v_0^2 \gg mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left\| \overrightarrow{f} \right\| (t=0) \gg mg}$$

Le poids d'un plomb est alors négligeable devant la force de traînée.

19) Durant cette phase, quel est le lien entre v et x' ?

Correction

La trajectoire étant rectiligne :

$$\boxed{v = \frac{dx'}{dt}}$$

20) Montrer que l'équation du mouvement dans la première phase se met sous la forme :

$$\frac{d\overrightarrow{v}}{dx'} + \frac{\overrightarrow{v}}{D} = \overrightarrow{0}$$

et exprimer D en fonction de g et v_∞.

Correction

Le PFD donne :

$$m \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -kv\overrightarrow{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\overrightarrow{v}}{dx'} + \frac{k\overrightarrow{v}}{m} = 0}$$

On pose donc :

$$\boxed{D = \frac{m}{k} = \frac{v_\infty^2}{g}}$$

21) Résoudre entièrement cette équation différentielle. Que représente le paramètre D ?

Correction

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et sans second membre. La solution est (en tenant compte des conditions initiales) :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{A}\, e^{-x'/D} \quad \text{avec :} \quad \overrightarrow{v}(t=0) = \overrightarrow{v_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0}\, e^{-x'/D}}$$

D est la longueur caractéristique de décroissance de la vitesse. Plus précisément, la vitesse a chuté de 63 % lorsque $x' = D$.

III.4) Deuxième phase : la phase intermédiaire

Dans cette phase, la vitesse a diminué.

22) Quelle est la nature de la trajectoire ?

Correction

On suppose que la vitesse a suffisamment diminué pour qu'elle soit négligeable devant v_∞, alors la première modélisation s'applique et on est dans une phase gravitaire. La trajectoire est donc parabolique.

III.5) Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant

On note que cette phase est quasiment verticale.

23) Montrer que la vitesse atteint une vitesse limite dont on donnera l'expression. Expliquer le terme de « mur aérodynamique » utilisé pour qualifier cette dernière phase.

Correction

Le PFD donne :

$$\boxed{m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - kv\,\vec{v}}$$

On a atteint le régime stationnaire et la vitesse vaut donc :

$$\vec{0} = m\vec{g} - kv_\infty\,\vec{v}_\infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_\infty = \frac{m\vec{g}}{kv_\infty} = -v_\infty\;\vec{u}_z}$$

On parle de « mur aérodynamique » car la vitesse de cette phase est limitée par la force aérodynamique : force de frottement fluide.